TD3 : Espace Euclidien
Formes Quad. et Bilinéaires.

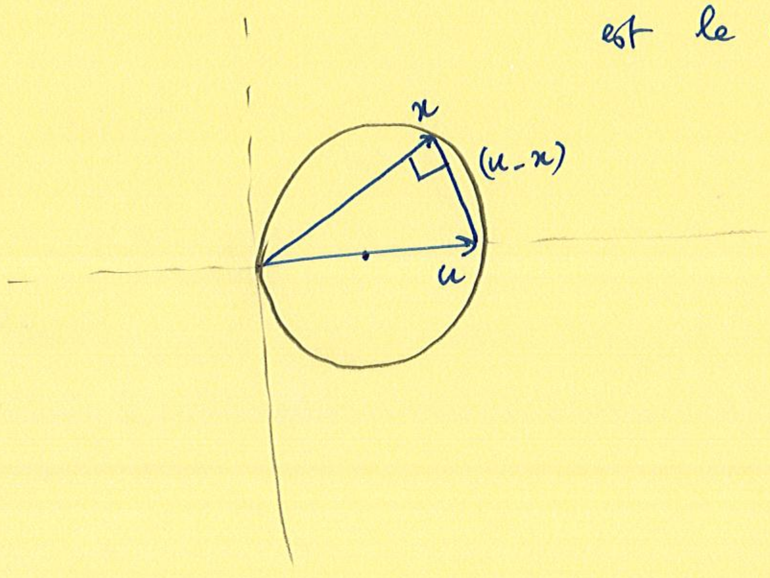
Exercice 1 : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien.

on utilise directement la formule de polarisation :
$\forall u, v \in E$

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \cancel{\|u\|^2} + \cancel{\|v\|^2} + 2\langle u, v\rangle$$
$$- \cancel{\|u\|^2} - \cancel{\|v\|^2} + 2\langle u, v\rangle$$
$$= 4\langle u, v\rangle$$

Ainsi $\|u+v\| = \|u-v\|$ ssi $\langle u, v\rangle = 0$ ssi $u \perp v$.

Exercice 2 : Dans $E = \mathbb{R}^2$ on reconnait un cercle : le lieu géométrique des solutions est le cercle de centre $\frac{u}{2}$ et de rayon $\|\frac{u}{2}\|$.



* Montrons que $C = \{ x \in E \mid \langle x, x-u\rangle = 0 \}$
$= \{ x \in E \mid \|x - \frac{u}{2}\| = \|\frac{u}{2}\| \}$.

Soit $x \in E$ tq $\|x - \frac{u}{2}\|^2 = \|\frac{u}{2}\|^2$

$\Leftrightarrow \langle x - \frac{u}{2}, x - \frac{u}{2} \rangle - \langle \frac{u}{2}, \frac{u}{2} \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle x - \frac{u}{2}, x \rangle - \langle x - \cancel{\frac{u}{2}}, \frac{u}{2} \rangle \cancel{- \langle \frac{u}{2}, \frac{u}{2} \rangle} = 0$

$\Leftrightarrow \langle x - u, x \rangle = 0$

Exercice 3 (Inversion) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ev euclidien.

$$i(u) = \begin{cases} u/\|u\|^2 & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}.$$

1)

* Mq i est une involution :

* si $u = 0$ $\quad i \circ i(0) = 0$ ✓

* si $u \neq 0$ $\quad \|i(u)\|^2 = \frac{1}{\|u\|^2}$. Ainsi :

$$i(i(u)) = \frac{u/\|u\|^2}{1/\|u\|^2} = u.$$

* Les points fixes de i

* $u = 0 \Rightarrow i(u) = 0$ $\quad$ 0 est un pt fixe.

* $u \neq 0 \Rightarrow \frac{u}{\|u\|^2} = u \Leftrightarrow \left\| \frac{u}{\|u\|^2} - u \right\| = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\|u\|^2} - 1 = 0$

$\iff \|u\| = 1$

En résumé : i fixe l'origine et le cercle unité.

2) on développe le carré : $u, v \in E \setminus \{0\}$.

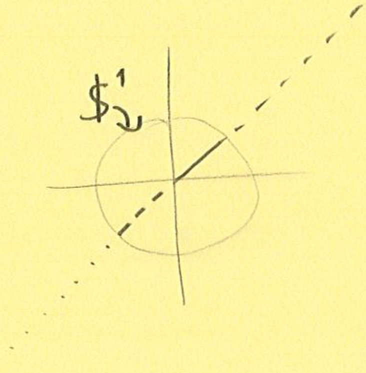
$$\frac{\|u-v\|^2}{\|u\|^2\|v\|^2} = \frac{1}{\|v\|^2} + \frac{1}{\|u\|^2} - 2\left\langle \frac{u}{\|u\|^2}, \frac{v}{\|v\|^2}\right\rangle$$

$$\|i(u)-i(v)\|^2 = \|i(u)\|^2 + \|i(v)\|^2 - 2\langle i(u), i(v)\rangle$$

$$= \frac{1}{\|u\|^2} + \frac{1}{\|v\|^2} - 2\left\langle \frac{u}{\|u\|^2}, \frac{v}{\|v\|^2}\right\rangle$$

3) $E = \mathbb{R}^2$

a) Soit $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$. L'image $i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ car

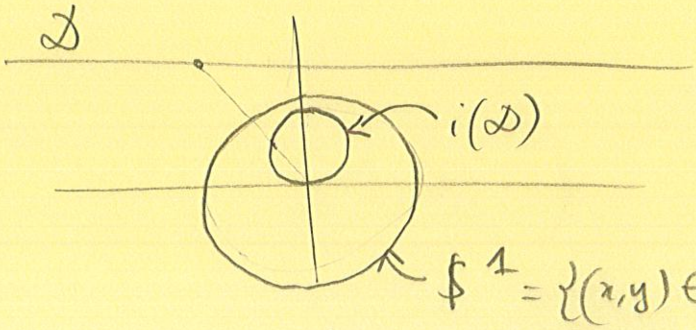


$[\subset]$: $i(v)$ est colinéaire à v.

$[\supset]$: Soit $v \in \mathcal{D}$, alors $i(v) = u$ satisfait $i(u) = i \circ i(v) = v$

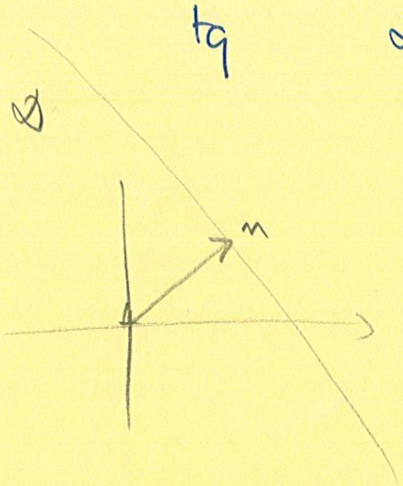
remarque : i envoie l'intérieur de la boule unité sur l'extérieur de la boule unité.

b) Soit $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u) + A$ une droite affine :



Etant donné $\mathcal{D}$ il existe un vecteur $n \in \mathbb{R}^2$

tq $\quad \mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle n, n - x \rangle = 0 \}$



on va montrer que l'image de $\mathcal{D}$ par i est un cercle de diamètre $i(n)$.

D'après l'exercice 2 on a :

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| y - \frac{i(n)}{2} \right\| = \left\| \frac{i(n)}{2} \right\| \right\}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \langle i(n) - y, y \rangle = 0 \}$$

$i(x) \in C$

$$\Leftrightarrow \langle i(x) - i(n), i(x) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{n}{\|n\|^2}, \frac{x}{\|x\|^2} \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|^2 \|n\|^2} \left\langle \frac{\|n\|^2}{\|x\|^2} x - n, x \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|^2 \|n\|^2} \left(- \langle n, x \rangle + \|n\|^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\|x\|^2 \|n\|^2} \langle n, x - n \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{i(x) \in \mathcal{D}} \,.\; x \in \mathcal{D}.$$

c) l'image d'un cercle passant par O est une droite affine car i est une involution.

Exercice 4 :

1) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a pour matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ (dans la base canonique)

$$q(x,y) = x^2 - 2x\left(\frac{3y}{2}\right) + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + y^2$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2 \qquad (*)$$

La forme quad q n'est pas positive / négative. De plus on a

$$\ell_1(x,y) = 1 \times x - \frac{3}{2}y = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2(x,y) = \frac{\sqrt{5}}{2}y = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle de $(*)$ est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de } q \text{ dans } \mathcal{B} = (u_1, u_2)} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & \sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$$

2) $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$

matrice de $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & -2 & 7/2 \\ -2 & 7/2 & -6 \end{pmatrix}$$

Décomposition de Gauss :

$$q(x,y,z) = 2\left(x^2 + x\left[\frac{3}{2}y - 2z\right]\right) - 2y^2 - 6z^2 + 7yz$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 \underbrace{- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y - 2z\right)^2 - 2y^2 - 6z^2 + 7yz}_{q'(y,z)}$$

$$q'(y,z) = -\frac{25}{8}y^2 + 10yz - 8z^2$$

$$= -\frac{25}{8}\left(y^2 + y\left(-\frac{80}{25}z\right)\right) - 8z^2$$

$$= -\frac{25}{8}\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2 + \underbrace{\frac{25}{8} \times \frac{8^2}{5^2}z^2 - 8z^2}_{=0}$$

$$\therefore\ q(x,y,z) = 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2$$

La forme quadratique q n'est pas positive ni négative.

Remarque : (Bonus) : si on pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8/5 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ complète la base

on a une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & -2 & 7/2 \\ -2 & 7/2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ -1 & -8/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -25/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1 \\ 0 & 1 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on peut prendre $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx$

$$= \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y-t+z)^2$$

(application immédiate de l'algo vu en cours)

Exercice 5 :

1) $q(x,y) = 9\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-3y}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{3}{2}x + 3y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)^2$

La forme quad. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est positive (et définie !). On pose :

$\ell_1(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\ell_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right) \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Les vecteurs u_1 et u_2 sont libres $\Rightarrow$ q est bien sous forme de somme de formes linéaires indép.

2) $q(x,y,z) = (x - 6y + 4z)^2 - (y - 4z)^2 + 2z^2$

Posons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ q est bien sous forme de somme de carré de forme linéaire indé. De plus qu'elle n'est pas positive, ni négative.

3) $q(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2 + x^2 + 2y^2$

n'est pas une somme de formes linéaires indépendantes car il y a 4 termes (on est dans $\mathbb{R}^2$). On a :

$q(x,y) = 4xy + x^2 + 2y^2 = \left(x^2 + 2x \times (2y) + 4y^2\right) - 2y^2$

$= (2y + x)^2 - 2y^2$

$$\left.\begin{array}{l} l_1(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ l_2(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \end{array}\right\} \text{ famille libre.}$$

ce n'est pas une forme quadr. positive ni négative.

4) $q(x,y,z) = (x+y+z)^2 + (-x+y+z)^2 - x^2$

la famille $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est liée

on a

$$q(x,y,z) = 2z^2 + 4yz + 2y^2 + x^2$$

$$= 2(y+z)^2 + x^2$$

q est bien une forme quadratique positive.

elle est non définie car $q(0,1,-1) = 2 - 4 + 2 + 0 = 0.$

remarque: Attention donc lorsque les formes linéaires ne sont pas indépendants !

Exercice 6 :

remarque: utiliser dans cet exercice la méthode des mineurs principaux.

1) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$

la matrice de q dans la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} (1-\lambda) & \mu \\ \mu & (1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det(M) = (1-\lambda)(1+\lambda) - \mu^2 = 1 - \lambda^2 - \mu^2 = 1 - (\lambda^2 + \mu^2)$$

q est positive et définie ssi $\Delta_1 \geq 0$.

ssi $1 > \lambda^2 + \mu^2$

2) $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

q déf pos ssi $\det(M) > 0$ et $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$ et $1 > 0$

or $\det M = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

q n'est pas déf. pos. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : $\quad q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $q(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$Aa = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a$$

$$Ab = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2a.$$

on a bien $\|a\| = \|b\| = 1$ et $\langle a, b \rangle = 0$. Si $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & +\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{1}{2}$

on a : $\cancel{QQ} = Q^t Q = Q Q^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q^t = Q^{-1} = Q$

on a alors :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= Q^t \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q.$$

Autrement dit

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\left[4(x+y)^2 + 2(x-y)^2 \right]$$

$$= 4\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

2) on utilise la décomposition de Gauss :

$$q(x,y) = 3\left(x^2 + 2x\frac{y}{3} + \left(\frac{y}{3}\right)^2\right) - \frac{y^2}{3} + 3y^2$$

$$= 3\left(x + \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}y^2$$

on pose : $l_1(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \times\sqrt{3} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$

$l_2(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8/3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \Longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

on pose $P^t = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 2\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et on a bien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 2\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

3) D'après la question 1) on a $Q^t Q = Id$.

D'après la question 2) on a $P^t P = A$

on a donc

$$P^t \, Id \, P = A$$

$$P^t Q^t Q P = A$$

$$(QP)^t QP = A$$

et on a $QP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & (1+\sqrt{8})/\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & (1-\sqrt{8})/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow (QP)^t = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \frac{1+\sqrt{8}}{\sqrt{3}} & \frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

on peut alors vérifier que

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} + y\,\frac{1+\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} + \frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\, y \right)^2$$

<u>Exercice 8</u>: traiter d'abord les cas $n=2$ et $n=3$.

La forme quadratique associée à la matrice est:

$$q(x_1, \dots, x_n) = (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i x_j$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(x_i^2 + x_j^2 - 2 x_i x_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$$

$$\geqslant 0.$$

et $q(1,1,1\dots 1) = 0$ $\therefore$ q est positive non définie.

Exercice 9 :

1) Matrice de $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mineurs principaux :

$\Delta_1 = 1$ $\quad \Delta_2 = 6-4 = 2$ et $\Delta_3 = 1$ $\quad \Rightarrow \phi$ déf pos.

2) on a

* $\|i\|^2 = \phi(i,i) = 1$ et $e_1 = i = (1,0,0)$

* $\phi(j,e_1) = -2$ et $u_2 = j - \phi(e_1,j)e_1 = (2,1,0)$

$\|u_2\|^2 = \phi(u_2,u_2) = 2$ et $e_2 = (2,1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

* $\phi(k,e_1) = 0$

$\left.\begin{matrix} \\ \phi(k,e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\}$ et $u_3 = k - \phi(e_1,k)e_1 - \phi(k,e_2)e_2 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$\|u_3\|^2 = \frac{1}{2}$ et $e_3 = \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

3) on a fait un procédé d'orthonormalisation ...

4) Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ on a $\phi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

d'après la question 3). Ainsi

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on a}$$

$$M_{\mathcal{B}} = P^t \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$